فصل هفتم

کاربردهای انتگرال معین

۷ . ۱ محاسبه مساحت در مختصات دکارتی

اگر در بازهٔ $[a,b]$ تابع $f(x)$ پیوسته و نامنفی باشد آنگاه بنابر آنچه در تعبیر هندسی انتگرال معین دیدیم، مساحت ذوزنقه منحنی‌الخط محدود به منحنی $y=f(x)$، محور Xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر است با انتگرال معین

$$Q=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

اگر در بازهٔ $[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\le 0$ ، آنگاه انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx\le 0$. لذا این انتگرال، از نظر قدر مطلق، برابر با مساحت Q متناظر به ذوزنقهٔ منحنی‌الخط است:

$$-Q=\int_a^b f(x)\,dx$$

شکل ۷ . ۱

اگر تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ تغییر علامت دهد بدین معنی که در یک تعداد متناهی از زیر بازه‌های $[a,b]$ نامنفی و در یک تعداد متناهی زیر بازه نامثبت باشد آنگاه در حالت کلی انتگرال روی زیر بازه‌هایی که $f(x)\ge 0$ ، مثبت و روی زیر بازه‌هایی که $f(x)\le 0$ ، منفی است. بنابراین انتگرال روی کل بازهٔ $[a,b]$ برابر است با تفاضل مساحت ناحیه‌هایی که بالای محور Xها و در زیر محور Xها قرار دارند. راه ساده دیگر این است که برای یافتن مساحت انتگرال

$$Q=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

را محاسبه نمائیم چون در اینجا عملاً بایستی تابع $f(x)$ را روی $[a,b]$ تعیین علامت کرده و در نتیجه انتگرال به صورت حاصلجمع و تفاضل انتگرال‌ها روی زیر بازه‌ها نوشته می‌شود.

شکل ۷ . ۲

اگر یک شکل مسطح بوسیله خطوط $x=a\ ,x=b\ (a<b)$ و منحنی‌های $y=f_1(x)\ ,y=f_2(x)$، با شرط $f_1(x)\le f_2(x)$ محدود شده باشد $(a\le x\le b)$، آنگاه مساحت این شکل از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$Q=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx\ . \qquad (2)$$

در حالت‌های معینی ممکن است مرز چپ $x=a$ (یا مرز راست $x=b$) به نقطه اشتراک منحنی‌های $y=f_1(x)\ ,y=f_2(x)$ تقلیل یابد. در این صورت b,a را می‌توان به عنوان طول‌های نقاط اشتراک منحنی‌های داده شده بدست آورد.

شکل ۷ . ۳

مثال ۱. (a) مطلوبست محاسبه مساحت شکل محدود به منحنی $y=\sin x$ و محور Xها در فاصله $[0,2\pi]$.

(b)مساحت محدود به منحنی‌های $y=|x-1|\ ,\ y=3-|x|$ را پیدا کنید.

(c) مساحت محدود به خطوط $x=0\ ,x=2$ ومنحنی‌های $y=2^x\ ,y=2x-x^2$ را بدست آورید.

(d)پیدا کنید مساحت ناحیه‌ای را که به منحنی‌های $x^2=4y$, $y=\frac{8}{x^2+4}$ محدود شده است.

(e)تمام مساحتی را که شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و خطوط $y=2x$, $y=x$ دارد بدست آورید.

حل. (a) چون $\sin\ x\geq 0$ هرگاه $0\leq x\leq\pi$, $\sin\ x\leq 0$ هرگاه $\pi\leq x\leq 2\pi$، داریم

شکل ۷ . ۴

$$Q=\int_0^{\pi}\sin xdx+|\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx|=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx\ .$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}==-(\cos 2\pi-\cos\pi)=-2\ .$$

در نتیجه $Q=2+|-2|=4$.

(b)منحنی‌ها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. با حل معادلهٔ $|x-1|=|x|-3$ طول این نقاط را بدست می‌آوریم: $x=2\ ,\ x=-1$.

شکل ۷ . ۵

بنابراین

$$S=\int_{-1}^{2}\left(3-|x|-|x-1|\right)dx.$$

بازهٔ را به سه بازهٔ بسته $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ تقسیم می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$S=\int_{-1}^{0}\left[(3+x)-(1-x)\right]dx+\int_{0}^{1}\left[(3-x)-(1-x)\right]dx$$

$$+\int_{1}^{2}\left[(3-x)-(x-1)\right]dx=1+2+1=4.$$

(c) چون ماکزیمم تابع $y=2x-x^2$ در نقطه $x=1$ بدست می‌آید و مساوی با 1 است و تابع $y=2^x\geq 1$، به ازای هر $x\in[0,2]$، داریم

شکل ۷ . ۶

$$S=\int_{0}^{2}\left[2^x-\left(2x-x^2\right)\right]\ dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2-\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}\ .$$

(d) ابتدا نقاط C, A از اشتراک منحنی‌ها را پیدا می‌کنیم. برای این منظور y را از دستگاه معادلات زیر حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=\dfrac{8}{x^2+4} \\ y=\dfrac{x^2}{4}, \end{cases}$$

که از آنجا $\frac{x^2}{4}=\frac{8}{x^2+4}$، یا $x^4+4x^2-32=0$.

شکل ۷ . ۷

ریشه‌های حقیقی این معادله نقاط $x_1=-2\,,\,x_2=2$ هستند. همانطور که از روی شکل دیده می‌شود، در بازهٔ $[-2,2]$، $\frac{x^2}{4}\geq\frac{8}{x^2+4}$. در نتیجه

$$S=\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(4\,arc\,tg\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=2\pi-\frac{4}{3}.$$

(e) ابتدا مساحت شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و خط $y=2x$ را که در ربع اول قرار دارد محاسبه می‌کنیم:

$$y=x^3\,,\,y=2x\Rightarrow 2x=x^3\Rightarrow x\left(x^2-2\right)=0\Rightarrow x=0\,,\,x=\sqrt{2}.$$

شکل ۷ . ۸

بنابراین

$$S_1=\int_0^{\sqrt{2}}\left(2x-x^3\right)dx=1.$$

سپس مساحت شکل محدود به منحنی $y=x^3$ و خط $y=x$ را که ربع اول قرار دارد محاسبه می‌کنیم:

$$y=x^3\ ,y=x\Rightarrow x^3=x\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x=0,1.$$

بنابراین

$$S_2=\int_0^1\left(x-x^3\right)dx=\frac{1}{4}.$$

پس در ربع اول داریم $S=S_1-S_2=\frac{3}{4}$ و لذا مساحت کل مطابق شکل برابر است با

$$\sigma=2S=\frac{3}{2}.$$

اکنون مساحت ناحیه‌ای را محاسبه می‌کنیم که یک ذوزنقهٔ منحنی‌الخط است و بوسیله منحنی با معادلات پارامتری محدود شده است:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (3)$$

که در آن $\alpha\le t\le\beta$ ، $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$.

فرض کنیم که معادلات (3) تابعی به صورت $y=f(x)$ را بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف کند، و در نتیجه، مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط را می‌توان از فرمول زیر محاسبه نمود:

$$S=\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b y\,dx.$$

شکل ۷ . ۹

در این انتگرال تغییر متغیر می‌دهیم:

$$x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)\,dt.$$

از (3) داریم $y=f(x)=f[\varphi(t)]=\psi(t)$ و در نتیجه

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

این فرمول محاسبه مساحت یک ذوزنقهٔ منحنی‌الخط است که به وسیله یک منحنی که به بصورت پارامتری نمایش داده شده محدود گردیده است.

مثال ۲. (a)مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه‌ای که با بیضی $x=a\cos t, y=b\sin t$ محدود شده است.

(b) مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه محدود به محور Xها و یک شاخه از سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), \qquad 0\le t\le 2\pi$$

(c)مساحت ناحیه محدود به آستروئید $(0\le t\le 2\pi)$ $y=a\sin^3 t$ و $x=a\cos^3 t$را پیدا کنید.

حل. (a) مساحت نیمه بالایی بیضی را محاسبه نموده و حاصل را دو برابر می‌کنیم.

شکل ۷ . ۱۰

در اینجا x از $-a$ تا $+a$ تغییر می‌کند و لذا t بین 0و π تغییر خواهد کرد.

$$S=2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)\,dt=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt$$

$$=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt=2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \pi ab.$$

(b) متغیر x از 0 تا $2\pi a$ تغییر می‌کند که متناظر است با تغییر t بین 0 و 2π.

شکل ۷ . ۱۱

با استفاده از (4) داریم

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$
$$= a^2\left[\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right]$$
$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi\,.$$

بالاخره بدست می‌آوریم

$$S = a^2(2\pi+\pi) = 3\pi a^2\,.$$

(c) داریم $y = a\sin^3 t = \psi(t),\ x = a\cos^3 t = \varphi(t)$.

شکل ۷ . ۱۲

اکنون مساحت ناحیه‌ای را محاسبه می‌کنیم که در ربع اول صفحه مشخصات قرار داشته و حاصل را چهار برابر می‌نمائیم. پس

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\left(-3a\sin t\cos^2 t\right)dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)(\sin 2t)^2 dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt - \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt - \frac{3}{2}a^2\left(\frac{1}{6}\sin^3 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{4}a^2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 0 = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

۷ . ۲ مساحت یک ناحیه منحنی الخط در مختصات قطبی

فرض کنیم در مختصات قطبی یک منحنی داشته باشیم که با معادله

$$\rho = f(\theta)$$

داده شده باشد که در آن $f(\theta)$ بر فاصله $\alpha \le \theta \le \beta$ تابعی پیوسته و نامنفی است. هدف ما محاسبه مساحت قطعه (ناحیه) منحنی‌الخط OAB است که بوسیله منحنی $\rho = f(\theta)$ و بردارهای شعاعی $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ محدود شده است.

شکل ۷ . ۱۳

ناحیه مفروض را بوسیله بردارهای شعاعی

$$\theta_0=\alpha \ , \ \theta=\theta_1 ,...,\theta_n=\beta$$

به n قسمت تقسیم می‌کنیم. زاویه‌های بین بردارهای شعاعی را که رسم نموده‌ایم با $\Delta\theta_1,\Delta\theta_2,...,\Delta\theta_n$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $\theta_{i-1}\le\overline{\theta}_i\le\theta_i$ و طول بردار شعاعی متناظر با این زاویه را با $\overline{\rho}_i$ نشان می‌دهیم. اکنون قطاع مستدیری را در نظر می‌گیریم که شعاع آن $\overline{\rho}_i$ و زاویه مرکزی آن $\Delta\theta_i$ است. مساحت آن مساوی با

$$\Delta S_i=\frac{1}{2}\overline{\rho}_i^2\,\Delta\theta_i$$

می‌باشد. حاصلجمع

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2\,\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\overline{\theta}_i\right)\right]^2\Delta\theta_i$$

تقریباً برابر با مساحت محدود به منحنی $\overset{\frown}{AB}$ و بردارهای شعاعی $\theta=\alpha \ , \ \theta=\beta$ است. چون این حاصلجمع یک حاصلجمع انتگرال تابع پیوسته $\rho^2=\left[f(\theta)\right]^2$ بر بازهٔ $\alpha\le\theta\le\beta$است، حد آن وقتی $n\to\infty$ و هر $\Delta\theta_i\to 0$ موجود بوده و برابر با انتگرال معین

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\theta_i\to 0}}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2\,\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\theta$$

می‌باشد. لذا مساحت قطعه OAB برابر است با

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta \qquad (۱)$$

مثال ۳. (a) مساحت ناحیه‌ای را که به لمنیسکات $\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}$ محدود شده است بدست آورید.

(b)مطلوبست محاسبه مساحت شکلی که محدود شده است به محور قطبی و اولین دور مارپیچ ارشمیدس $\rho=a\theta$، که در آن a عدد مثبتی است.

(c)مساحت ناحیه‌ای را که به کاردیوئید $\rho=(1+\cos\theta)$ محدود شده است محاسبه نمائید. همچنین مساحت ناحیه خارج این کاردیوئید و داخل دایرهٔ $\rho=3\cos\theta$ را محاسبه نمائید.

(d)مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه‌ای که محدود است به دایره‌های $\rho=3\sqrt{2}\,a\cos\theta$ و $\rho=3a\sin\theta$.

حل. (a) چون از تبدیل θ به $\pi-\theta$ و $2\pi-\theta$، $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ تغییری نمی کند پس محورهای Yها و Xها هر دو محور تقارن شکل هستند.

شکل ۷ . ۱۴

در ناحیه اول صفحه تغییرات θ بین 0 و $\frac{\pi}{4}$ است. بنابراین اگر S مساحت مورد نظر باشد آنگاه

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta = \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

بنابراین $S = a^2$.

(b) وقتی که θ از 0 تا 2π تغییر می‌کند بردار شعاعی یک منحنی را طی می‌کند که قطعه منحنی‌الخط $OABC$ را محدود می‌سازد.

شکل ۷ . ۱۴

بنابراین با استفاده از فرمول (1) داریم

$$S_{OABC}=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta=\frac{a^2}{2}.\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}.\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\pi^3a^2\ .$$

فاصله نقطه C تا قطب برابر با $\rho=2\pi a$ است. بنابراین دایره به شعاع $\overline{OC}$ دارای مساحت

$$\pi.\overline{OC}^2=4\pi^3\,a^2=3.\frac{4}{3}\pi^3\,a^2=3S_{OABC}$$

است، یعنی، مساحت ناحیه‌ای که بوسیله بردار شعاعی و اولین دور مارپیچ ارشمیدس محدود شده است $\frac{1}{3}$ مساحت دایره‌ای است که شعاع آن مساوی بزرگترین مقادیر شعاع ها در اولین دور می‌باشد. این نتیجه‌ای بود که ارشمیدس به آن دست یافت.

(c) به طور کلی، اگر ناحیه‌ای مانند $CEFD$ داشته باشیم که با دو شعاع $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ و توابع $\rho=f(\theta)$ و $\rho=g(\theta)$، که در آن $f(\theta)\geq g(\theta)\geq 0$ ، داده شده باشد می‌توانیم چنین استدلال کنیم که

$S=CEFD$ مساحت = (OEF مساحت) − (OCD مساحت)

شکل ۷ . ۱۶

به دلیل آن که ناحیه‌های OEF و OCD در هیچ نقطه‌ای بجز مرز CD اشتراک ندارند. اما

OEF مساحت $=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(\theta)]^2\,d\theta$ و OCD مساحت $=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[g(\theta)]^2\,d\theta,$

که با دوبار استفاده از فرمول (1) بدست می‌آیند و بنابراین

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(\theta)]^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[g(\theta)]^2\,d\theta$$

که معادل است با

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\ \left[f\left(\theta\right)\right]^{2}-\left[g\left(\theta\right)\right]^{2}\ \right\}d\theta. \qquad (2)$$

شکل ۷ . ۱۷

چون از تبدیل θ به $2\pi-\theta$ در کاردیوئید $\rho=\left(1+\cos\theta\right)$ مقدار ρ تغییر نمی‌کند پس محور Xها محور تقارن شکل است. حدود انتگرال‌گیری عبارتند از $\alpha=-\pi$, $\beta=\pi$ و شعاع‌های $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$، مرزهای ناحیه، هر دو به یک نقطه یعنی قطب، تقلیل می‌یابند زیرا $\rho|_{\theta=-\pi}=\rho|_{\theta=+\pi}=0$. از فرمول (1) نتیجه می‌گیریم که مساحت ناحیه برابر است با

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos\theta\right)^2 d\theta=\int_{0}^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\ d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\ d\theta.$$

بنابراین

$$S_1=\left[\theta+2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{0}^{\pi}=\frac{3}{2}\pi.$$

از روی دایره $\rho=3\cos\theta$ داریم $\rho^2=3\rho\cos\theta$، یعنی، $x^2+y^2=3x$ و این دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{3}{2},0\right)$ و شعاع $\frac{3}{2}$ است.

شکل ۷ . ۱۸

برای ناحیه خارج کاردیوئید $\rho=1+\cos\theta$ و داخل دایره $\rho=3\cos\theta$ حدود انتگرال‌گیری $\alpha=-\frac{\pi}{3}$ و $\beta=\frac{\pi}{3}$ هستند زیرا این مختصات زاویه‌ای نقاط اشتراک کاردیوئید و دایره بوده وبه علاوه برای $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ داریم $3\cos\theta\ge 1+\cos\theta$. بنابراین با استفاده از فرمول (2) با قرار دادن $f(\theta)=3\cos\theta$ ، $g(\theta)=1+\cos\theta$، $\alpha=-\frac{\pi}{3}$، $\beta=\frac{\pi}{3}$ داریم

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2\right]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(8\cos^2\theta-2\cos\theta-1\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(8.\frac{1+\cos2\theta}{2}-2\cos\theta-1\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(4\cos2\theta-2\cos\theta+3\right)d\theta$$

(مجدداً از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که ناحیه نسبت به محور Xها تقارن دارد)

$$=\left[2\sin2\theta-2\sin\theta+3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sin\frac{2\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}+\pi=\pi,$$

که $\frac{4}{9}$ مساحت $\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi=\frac{9}{4}\pi$ است که به تنهایی توسط دایره محدود شده است.

(d)منحنی $\rho=3\sqrt{2}a\cos\theta$ دایره $\left(x-\frac{3\sqrt{2}a}{2}\right)^2+y^2=\frac{9a^2}{2}$ است که به مرکز $\left(\frac{3\sqrt{2}a}{2},0\right)$ و شعاع $\frac{3a}{\sqrt{2}}$ بوده، در نیمه راست صفحه مختصات قرار داشته، از قطب $\rho=0$ گذشته و بر محور Yها مماس است. منحنی $\rho=3a\sin\theta$ دایره $x^2+\left(y-\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{9a^2}{4}$ است که به مرکز $\left(0,\frac{3a}{2}\right)$ و شعاع $\frac{3a}{2}$ بوده، در نیمه بالایی صفحه قرار داشته،از قطب $\rho=0$ گذشته و بر محور Xها مماس است. در نتیجه قطب یک نقطه اشتراک دایره‌هاست. نقطه دیگر اشتراک دایره‌ها، B از معادله $3\sqrt{2}a\cos\theta=3a\sin\theta$ پیدا می‌شود که بدست می‌آوریم $B=\left(arc\,tg\sqrt{2},a\sqrt{6}\right)$.
همچنانکه در شکل زیر دیده می‌شود مساحت مورد نظر S برابر با حاصلجمع مساحت‌های قطعه‌های دایره‌ای $OABO$و $OCBO$ است که به یکدیگر بوسیله شعاع $\theta=arc\,tg\sqrt{2}$ ملحق شده‌اند.

شکل ۷ . ۱۹

قوس BAO بوسیله نقطه انتهائی شعاع قطبی ρ از دایره $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\theta$، به ازای $arc\,tg\,\sqrt{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ رسم می‌شود، و قوس OCD بوسیله نقطه انتهایی شعاع قطبی ρ از دایره $\rho = 3a\sin\theta$، به ازای $0 \le \theta \le arc\,tg\,\sqrt{2}$ رسم می‌گردد. بنابراین

$$S_{OABO} = 9a^2 \int\limits_{arc\,tg\,\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - arc\,tg\,\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$S_{OCBO} = \frac{9}{2}a^2 \int\limits_{0}^{arctg\sqrt{2}} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{9}{4}a^2\left(arc\,tg\,\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

در نتیجه

$$S = S_{OABO} + S_{OCBO} = 2.25\,a^2\left(\pi - arc\,tg\sqrt{2} - \sqrt{2}\right).$$

۷ . ۳ طول قوس یک منحنی

۱. طول قوس یک منحنی در مختصات دکارتی

فرض کنیم منحنی مسطح $\widehat{AB}$ با معادله $y = f(x)$ ، $a \le x \le b$، داده شده باشد که در آن $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازهٔ بسته $[a,b]$ است. منحنی $\widehat{AB}$ را بوسیله نقاط

$$A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$$

در جهت از A به B به n قسمت دلخواه تقسیم می‌کنیم. با وصل نقاط همجوار بوسیله وترها یک کمان چند ضلعی شکل بدست می‌آوریم که در داخل منحنی $\widehat{AB}$ محاط شده است و طول آن را با P نشان می‌دهیم. طول قطعه خط $M_{i-1}M_i$ از کمان چند ضلعی شکل را با ℓ_i نمایش داده و طول بزرگترین قطعه خطهای این کمان را با μ نشان می‌دهیم، یعنی $\mu = \max_{1 \le i \le n} \{\ell_i\}$.

شکل ۷ . ۲۰

تعریف. عدد L حد طول‌های P از کمان‌های چند ضلعی شکل است وقتی $\mu \to 0$ $\left(L = \lim_{\mu \to 0} P\right)$ در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر کمان چند ضلعی شکل که در آن $\mu < \delta$، نامساوی $|L - P| < \varepsilon$ برقرار باشد.

اگر حدی مانند L از طول‌های P از کمان‌های چند ضلعی شکل محاط شده در منحنی وقتی $\mu \to 0$ وجود داشته باشد، آنگاه این حد **طول قوس** $\widehat{AB}$ نامیده می‌شود.

اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوسته $f'(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد، آنگاه طول L از قوس $\widehat{AB}$ از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (1)$$

برای اثبات فرض می‌کنیم $M_i(x_i, f(x_i))$، بنابراین برای طول این نقاط داریم

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

در این صورت طول ℓ_i از قطعه خط $M_{i-1}M_i$ از کمان چند ضلعی شکل مساوی است با

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

در نتیجه، $\ell_i = \sqrt{1+f'^2\left(\xi_i\right)}\,\Delta x_i \qquad , \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

بنابراین کل طول کمان چند ضلعی شکل مساوی است با

$$P = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2\left(\xi_i\right)}\,\Delta x_i \ .$$

طرف راست رابطه بالا یک حاصلجمع انتگرال برای انتگرال معین (1) است. تابع $\sqrt{1+f'^2(x)}$ بر $[a,b]$ پیوسته است و بنابراین حد این حاصلجمع وقتی $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ مساوی انتگرال معین (1) است.

چون $\lambda \le \mu$ (به دلیل آن که $\ell_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ که نتیجه می‌دهد $|\Delta x_i| \le \ell_i$)، دیده می‌شود که $\lambda \to 0$ وقتی $\mu \to 0$. لذا

$$L = \lim_{\mu\to 0} P = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\ f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+\ f'^2(x)}\ dx \,.$$

مثال ۴: (a)محیط دایرهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ را بدست آورید.

(b)محیط آستروئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ را پیدا کنید.

(c)طول قوسی از سهمی $x^2 = 2py\left(p>0\right)$ را محاسبه نمائید.

(d)مطلوبست محاسبه طول قوسی از منحنی $y^2 = x^3$ که بین نقاط $(0,0)$, $(4,8)$ واقع است.

حل. (a)ابتدا طول یک چهارم محیط دایره را که در ربع اول صفحه قرار دارد محاسبه می‌کنیم.

شکل ۷ . ۲۱

معادله قوس $\overset{\frown}{AB}$ عبارت است از

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

که از آنجا $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ ، در نتیجه

$$\frac{1}{4}L=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=R\frac{\pi}{2}$$

بنابراین محیط دایره مساوی است با $L=2\pi R$.

(b) همانطور که می‌دانیم، آستروئید نسبت به محورهای مختصات و نیمسازهای ربع اول و سوم و نیز دوم و چهارم متقارن است. بنابراین کافی است که طول قوس آن قسمت از آستروئید را که بین خط $y=x$ و محور Xها قرار دارد محاسبه نموده و حاصل را هشت برابر نمائیم.

شکل ۷ . ۲۲

در ربع اول صفحه $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ و در $x=a$, $y=0$ و در $x=\frac{a}{2^{\frac{2}{3}}}$، $y=x$. به علاوه

$$y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}=-x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

در نتیجه

$$L=8\int_{\frac{a}{2^{\frac{3}{2}}}}^{a}a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx=6a.$$

(c)منحنی نمایش این سهمی از مبدأ می‌گذرد و محور Yها محور تقارن آن می‌باشد. پس کافی است طول قوس آن را از مبدأ تا نقطه A به طول $a>0$ حساب کنیم. (محاسبه طول قوس $\widehat{OA}$):

$$\widehat{OA}\ \text{طول قوس}=L=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx\ .$$

چون $y=\frac{x^2}{2p}$ پس $y'=\frac{x}{p}$ و رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$L=\int_0^a\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\,dx=\frac{1}{p}\int_0^a\sqrt{x^2+p^2}\,dx\,.$$

حال به محاسبه انتگرال نامعین $I=\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx$ می‌پردازیم. داریم

$$I=\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx=\int\frac{x^2+p^2}{\sqrt{x^2+p^2}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+p^2}}dx+p^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}}\,.$$

برای محاسبه I هریک از انتگرال‌های طرف دوم رابطه بالا را محاسبه می‌نمائیم. اولین انتگرال را به روش جزء به جزء حل می‌کنیم:

$$\left|\begin{array}{l}u=x\\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+p^2}}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left|\begin{array}{l}du=dx\\ v=\sqrt{x^2+p^2}\end{array}\right.$$

و بنابراین

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+p^2}}=x\sqrt{x^2+p^2}-\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx=x\sqrt{x^2+p^2}-I.$$

پس

$$I=\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx=x\sqrt{x^2+p^2}-I+p^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|+C$$

یا

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|+C$$

و چون این مقدار را برای محاسبه L قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2p}\left(x\sqrt{x^2+p^2}+p^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|\right)\Bigg|_0^a\\&=\frac{1}{2p}\left(a\sqrt{a^2+p^2}+P^2\ln\left|a+\sqrt{a^2+p^2}\right|-p^2\ln p\right).\end{aligned}$$

(d) تابع $f(x)$ برای $x\geq 0$ تعریف شده است.

شکل ۷ . ۲۳

چون نقاط داده شده در ربع اول صفحه قرار دارند، $y = x^{\frac{3}{2}}$ بنابراین

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \qquad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}.$$

در نتیجه

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{4}{9}x}\, dx = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}\left(1+\frac{4}{9}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

اکنون طول قوس یک منحنی را پیدا می‌کنیم که معادله منحنی به صورت پارامتری نمایش داده شده است:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (2)$$

که در آن $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ توابعی پیوسته با مشتقاتی پیوسته بوده، و $\varphi'(t)$ در بازهٔ $[\alpha,\beta]$ صفر نمی شود. در این حالت، معادله (2) تعریفی بدست می‌دهد از تابعی مانند $y=f(x)$ که پیوسته بوده و دارای مشتق پیوسته

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

می باشد. در این صورت با تغییر متغیر در انتگرال (1) و با فرض $b=\varphi(\beta)\,, a=\varphi(\alpha)$ بدست می‌آوریم

$$x=\varphi(t)\,,\ dx=\varphi'(t)\,dt$$

و بنابراین

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\ \varphi'(t)\,dt$$

یا

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt. \qquad (3)$$

مثال ۵: (a) محیط آستروئید زیر را بدست آورید:

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \quad , \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

(b) محیط یک شاخه از سیکلوئید زیر را بدست آورید:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad 0 \le t \le 2\pi .$$

(c) طول قوس منحنی $y = \sin^5 t$ ،$x = \cos^5 t$ را از $t_1 = 0$ تا $t_2 = \frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

(d) اولاً ،نشان دهید که طول قوس منحنی

$$\begin{cases} x = f''(t)\cos t + f'(t)\sin t \\ y = -f''(t)\sin t + f'(t)\cos t \end{cases}$$

از $t = t_1$ تا $t = t_2$ برابر با $\left[f(t) + f''(t) \right]_{t1}^{t2}$ می‌باشد.

ثانیاً، طول قوس منحنی

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

را از $t = 0$ تا $t = 2$ محاسبه نمائید.

حل. (a) چون منحنی نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است ما طول یک چهارم منحنی را که در ربع اول صفحه قرار دارد محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t.$$

پارامتر t بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند. بنابراین

$$\frac{1}{4}L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t\cos^2 t}\, dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\, dt = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}$$

و لذا $L = 6a$.

(b) از معادلهٔ سیکلوئید بدست می‌آوریم که $\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$ و $\psi'(t) = a \sin t$. وقتی x دربازهٔ $[0, 2\pi a]$ حرکت کند، پارامتر t دربازهٔ $[0, 2\pi]$ تغییر میکند. در نتیجه طول قوس مورد نظر برابر است با

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

(c) ابتدا مشتقات نسبت به پارامتر t را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt} = -5\cos^4 t \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 5\sin^4 t\cos t.$$

در نتیجه،

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-5\cos^4 t\sin t\right)^2+\left(5\sin^4 t\cos t\right)^2}\,dt=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t+\cos^6 t}\,dt$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt=\frac{-5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d\left(\cos 2t\right)$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{3}\ln\left(\sqrt{3}.\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{5}{8}\left[2-\frac{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\right].$$

(d)با استفاده از فرمول محاسبه طول قوس منحنی‌های پارامتری داریم:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left\{\left[f'''(t).\cos t+f'(t)\sin t\right]^2+\left[-f'''(t).\sin t-f'(t).\sin t\right]^2\right\}}\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[f'''(t)+f'(t)\right]^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(f'''(t)+f'(t)\right)dt$$

$$=\left[f''(t)+f(t)\right]_{t_1}^{t_2}.$$

برای قسمت ثانیاً داریم:

$$L=\int_0^2\sqrt{\left\{\left[e^t\left(\cos t+\sin t\right)+e^t\left(-\sin t+\cos t\right)\right]^2+\left[e^t\left(\cos t-\sin t\right)+e^t\left(-\sin t-\cos t\right)\right]^2\right\}}\,dt$$

$$=\int_0^2 e^t\sqrt{\left(2\cos t\right)^2+\left(-2\sin t\right)^2}\,dt=2\int_0^2 e^t\,dt=2\left[e^t\right]_0^2=2\left(e^2-1\right).$$

۲ . طول قوس یک منحنی در مختصات قطبی.

در مختصات قطبی معادله منحنی به صورت

$$\rho=f\left(\theta\right)\qquad(4)$$

داده شده است که در آن ρ بردار شعاعی و θ زاویه قطبی است.

فرمول‌های تبدیل مختصات قطبی به مختصات دکارتی را می‌نویسیم:

$$x=\rho\ \cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta$$

اگر بجای ρ مقدارش را از روی (4) برحسب θ قرار دهیم، معادلات

$$x=f\left(\theta\right)\cos\theta,\ y=f\left(\theta\right)\sin\theta$$

را بدست خواهیم آورد. این معادلات را می‌توان به عنوان معادلات پارامتری منحنی در نظر گرفت و فرمول (3) را برای محاسبهٔ طول قوس بکار برد. بدین منظور، مشتقات x و y را نسبت به پارامتر θ بدست می‌آوریم:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)cos\theta-f(\theta)sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)cos\theta.$$

در این صورت

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left[f'(\theta)\right]^2+\left[f(\theta)\right]^2=\rho'^2+\rho^2.$$

بنابراین برای محاسبهٔ طول قوس در مختصات قطبی از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$L=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta. \qquad (5)$$

مثال ۶: (a)محیط کاردیوئید $\rho=a(1+cos\theta)$ را محاسبه نمائید.

(b) طول قوس منحنی $\rho=\sin^3\frac{\theta}{2}$ از $\theta_1=0$ تا $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ را پیدا کنید.

(c) محیط منحنی بستهٔ $\rho=a\sin^4\frac{\theta}{4}$ را محاسبه نمائید.

(d) طول قوس منحنی $\rho=\frac{1}{1+cos\theta}$ را در فاصلهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ محاسبه نمائید.

حل. (a) اگر θ از 0 تا π تغییر کند نصف طول قوس مورد نظر را بدست می آوریم. در اینجا $\rho'=-a\sin\theta$.

شکل ۷ . ۲۴

بنابراین

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2cos\theta}\,d\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi} cos\frac{\theta}{2}\ d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

(b) داریم $\rho' = \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ در نتیجه

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3} + \left(\sin^2\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - cos\frac{2\theta}{3}\right)\ d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

(c) چون تابع $\rho = a\sin^4\frac{\theta}{4}$ یک تابع زوج است، منحنی مفروض نسبت به محور Xها تقارن دارد. چون تابع $\sin^4\frac{\theta}{4}$ دارای دور تناوب 4π است، در طول نصف دور تناوب از 0 تا 2π شعاع قطبی از 0 تا a افزایش می‌یابد، و با توجه به تقارن نصف منحنی را رسم خواهد کرد.

شکل ۷. ۲۵

به علاوه ، $\rho' = a\sin^3\left(\frac{\theta}{4}\right)cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$ و

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2\sin^8\left(\frac{\theta}{4}\right) + a^2\sin^6\left(\frac{\theta}{4}\right)cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right)} = a\sin^3\left(\frac{\theta}{4}\right),$$

هرگاه $0 \le \theta \le 2\pi$. بنابراین

$$L = 2a\int_0^{2\pi}\sin^3\left(\frac{\theta}{4}\right)\ d\theta = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t dt = \frac{16}{3}a, \qquad (\theta = 4t).$$

(d) داریم

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left[\frac{\sin\theta}{(1+cos\theta)^2}\right]^2+\left[\frac{1}{1+cos\theta}\right]^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2\theta+1+2cos\theta+cos^2\theta}{(1+cos\theta)^4}}\ \ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{(1+cos\theta)^3}}\ \ d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{8cos^6\frac{\theta}{2}}}\ \ d\theta=\frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{cos^3\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\frac{\theta}{2}}{cos^4\frac{\theta}{2}}\ \ d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\frac{\theta}{2}}{\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}d\theta.$$

اکنون اگر تغییر متغیر $\sin\frac{\theta}{2}=u$ بدهیم داریم $cos\frac{\theta}{2}d\theta=2du$ و لذا

$$A=\frac{1}{2}\int\frac{cos\frac{\theta}{2}d\theta}{\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}=\int\frac{du}{(1-u^2)^2}=\int\frac{du}{(1-u)^2(1+u)^2}.$$

اما به سادگی دیده می‌شود که

$$\frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1-u)}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}\right).$$

پس

$$A=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-u}-\ln(1-u)-\frac{1}{1+u}+\ln(1+u)\right)+C.$$

در نتیجه

$$L=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\sin\frac{\theta}{2}}+\ln\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}-\ln\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

و پس از محاسبه دیده می‌شود که $L=\frac{1}{4}\left[2\sqrt{2}+\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right]$.

۷ . ۴ محاسبهٔ‌حجم یک جسم بااستفاده ازمساحت‌های قطعه‌های موازی

جسم سه بعدی T داده شده است. فرض کنیم که مساحت هر قطعه‌ای از این جسم که بوسیلهٔ صفحه‌ای عمود بر محور Xها قطع می‌شود بر ما معلوم باشد. این مساحت بستگی به موقعیت صفحهٔ قاطع دارد، یعنی، این مساحت تابعی از x است:

$$Q = Q(x)$$

شکل ۷ . ۲۶

فرض می‌کنیم که $Q(x)$ تابعی پیوسته از x بوده و حجم جسم T را محاسبه می‌نمائیم.
صفحات $x = x_0 = a, x = x_1, ..., x = x_{i-1}, x = x_i, ..., x = x_n = b$ را رسم می‌کنیم. این صفحات جسم را به صورت قطعه قطعه درمی‌آورند. در هر زیر بازهٔ $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ نقطهٔ دلخواهی مانند ξ_i انتخاب کرده و برای هر $i = 1,2,...,n$ جسمی استوانه‌ای می‌سازیم که مولدهای آن موازی با محور X ها و منحنی هادی آن مرز قطعه‌ای از جسم T است که بوسیله صفحهٔ $x = \xi_i$ بدست آمده است.

حجم یک چنین استوانه‌ای، که مساحت قاعدهٔ آن

$$Q(\xi_i) \qquad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$$

و ارتفاع Δx_i است، مساوی با $Q(\xi_i)\,\Delta x_i$ خواهد شد. حجم کلیهٔ استوانه‌ها عبارت است از

$$\upsilon_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i .$$

حد این حاصلجمع وقتی $n \to \infty$ و $\max \Delta x_i \to 0$ (در صورت وجود) حجم داده شدهٔ T است:

$$\upsilon = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i .$$

چون بدیهی است که υ_n یک حاصلجمع انتگرال تابع پیوستهٔ $Q(x)$ بربازهٔ $[a,b]$ است، حد بالا وجود داشته و برابر با انتگرال معین زیر است:

$$V=\int_a^b Q(x)\,dx. \qquad (1)$$

مثال ۷: (a) حجم بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را محاسبه نمائید.

(b) حجم جسمی را که محدود به سهموی بیضی گون $x=\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}\ (p,q>0)$ و صفحهٔ $x=a$ است محاسبه نمائید.

(c) حجم مشترک بین دو استوانهٔ $x^2+y^2=R^2$ و $x^2+z^2=R^2$ را بدست آورید.

(d) خط مستقیمی موازی صفحهٔ OYZ حرکت می‌کند و همواره بر دو بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ که در صفحات OXY و OXZ واقع هستند متکی است حجم بدست آمده را حساب کنید.

(e) محل تلاقی اقطار یک مربع در طول قطر یک دایرهٔ به شعاع a حرکت می‌کند. صفحه‌ای که مربع در آن واقع است همواره عمود بر صفحهٔ دایره باقی می‌ماند و دو راس متقابل مربع همواره روی دایره قرار دارند. حجم جسمی را که به وسیلهٔ این حرکت ساخته شده است بدست آورید.

حل. (a) در مقطعی از بیضوی که به وسیلهٔ صفحه‌ای موازی با صفحهٔ OYZ و بفاصلهٔ x از آن ساخته شده ، بیضی زیر را داریم:

شکل ۷ . ۲۷

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \qquad \text{یا} \qquad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1$$

با نیمه قطرهای $c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

اما مساحت این بیضی مساوی با $\pi b_1 c_1$ است. بنابراین

$$Q(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

لذا حجم بیضوی خواهد شد

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

در حالت خاصی که $a=b=c$ بیضوی به کره تبدیل شده و داریم $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

(b) در شکل زیرقسمتی از مقطع دو استوانه که در کنج اول فضا قرار دارد نشان داده شده است . اکنون هر صفحهٔ عمود بر محور OY شکل را در یک مربع قطع می‌کند. فرض کنیم صفحه‌ای عمود بر محور OY و به فاصلهٔ y از مبدا رسم کرده باشیم. مقطع این صفحه با جسم مورد نظر مربع $NMM'N'$ است. از روی ربع دایرهٔ OHB طول $\overline{M'N'}$ برابر با $\sqrt{R^2-y^2}$ بدست می‌آید. پس مساحت مربع $Q(y)=R^2-y^2$ خواهد بود و جسم در کنج اول فضا دارای حجمی مساوی $V_1=\int_0^a\left(R^2-y^2\right)dy=\frac{2}{3}R^3$ است. حجم کل هشت برابر این مقدار است، یعنی $V=\frac{16}{3}R^3$.

شکل ۷ . ۲۸

(c) مقطع سهموی با صفحه $x=a$ عبارت است از بیضی $\frac{y^2}{2pa}+\frac{z^2}{2qa}=1$. حال با صفحه‌ای موازی صفحه OYZ و به فاصله x از آن جسم را قطع می‌کنیم $(0\le x\le a)$. مقطع بیضی $\frac{y^2}{2px}+\frac{z^2}{2qx}=1$ است که نیمه قطرهای آن $b_1=\sqrt{2px}$ و $c_1=\sqrt{2qx}$ می‌باشند.

شکل ۷ . ۲۹

مساحت بیضی فوق عبارت است از $Q(x)=\pi b_1 c_1 = 2\pi x\sqrt{pq}$. پس حجم مورد نظر مساوی است با

$$Q(x)=\int_0^a Q(x)\,dx = 2\pi\sqrt{pq}\int_0^a x\,dx = \pi a^2\sqrt{pq}\,.$$

(d)مطابق شکل زیر فرض کنیم $\overline{OH}=x$. مساحت مثلث HAB را بدست می‌آوریم:

شکل ۷ . ۲۹

$$\overline{AH} = z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ , \qquad \overline{BH} = y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a_2}}\ .$$

پس $Q(x) = \underset{HAB}{S} = \frac{1}{2}bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ ودر نتیجه $V_1 = \int_a^b \frac{1}{2}bc(1-\frac{x^2}{a^2})dx = \frac{abc}{3}$.

اما این حجم جسمی است که در کنج اول فضا واقع است . حجم کل برابر است با $V = 8V_1$، یعنی،

$$V = \frac{8}{3}abc.$$

(e) مطابق شکل زیر محور OX را بر قطر MM' از دایره منطبق می‌گیریم و فرض می‌کنیم صفحه‌ای که مربع مفروض در آن واقع است به فاصله x از مبدأ O عمود بر محور OX رسم شود، یعنی $\overline{OH} = x$. حال مساحت مربع $ABCD$ را محاسبه می‌کنیم. داریم $\overline{AC} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$.

شکل ۷ . ۳۱

اما

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 = 4\left(a^2 - x^2\right) \ \Rightarrow\ \overline{AB}^2 = 2\left(a^2 - x^2\right).$$

پس $Q(x) = 2\left(a^2 - x^2\right)$ و بنابراین

$$V = 2\int_0^a Q(x)\,dx = 4\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{8a^3}{3}\ .$$

۷ . ۵ حجم جسم حاصل از دوران

فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد. در این صورت جسمی که از دوران شکل محدود به منحنی $y=f(x)$، خطوط $x=a$ و $x=b$ و محور Xها بدور محور Xها بدست می‌آید دارای حجمی مساوی

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx \qquad (1)$$

می باشد. برای اثبات این مطلب ، بازه بسته $[a,b]$ را بوسیله نقاط

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

به n قسمت دلخواه تقسیم می کنیم. سپس ، مطابق شکل زیر ، بر هر بازه $[x_{i-1},x_i]$ یک مستطیل می سازیم . با دوران به دور محور Xها هر مستطیل یک استوانه رسم می نماید.

شکل ۷ . ۳۲

حجم i امین استوانه را که از دوران مستطیل $PMNQ$ به دور محور Xها بدست می آید حساب می کنیم:

$$v_i=\pi f^2\left(x_{i-1}\right)\Delta x_i$$

که در آن $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. حاصلجمع حجم‌های تمامی n استوانه‌ها تقریباً مساوی با حجم حاصل از دوران شکل داده شده است:

$$V\cong\sum_{i=1}^{n}\pi f^2\left(x_{i-1}\right)\Delta x_i .$$

از طرف دیگر، این یک حاصلجمع انتگرال برای انتگرال معین (1) است. چون تابع $f^2(x)$ در $[a,b]$ پیوسته است، حد این حاصلجمع وقتی $n\to\infty$ و $\lambda=\max\limits_{0\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ موجود بوده ومساوی انتگرال معین (1) می‌باشد. بنابراین

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\pi f^2\left(x_{i-1}\right)\Delta x_i=\pi\int_a^b\left(f\left(x\right)\right)^2 dx .$$

مثال ۸: (a)مطلوبست حجم جسمی که از دوران دایره $x^2+(y-b)^2=a^2$ $\quad (b>a)$ به دور محور Xها بدست می‌آید. (این جسم **چنبره** نامیده می‌شود).

(b) شکل محدود به یک قوس سیکلوئید $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ به دور محور Xها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل از دوران را بدست آورید.

(c)خط مستقیمی که مبدأ مختصات را به نقطه (a,b) وصل می‌کند حول محور Xها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل از دوران را حساب کنید.

(d)همان شکل داده شده در (b) به دور محور Y ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل از دوران را حساب کنید.

(e)حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران آستروئید $x=a\cos^3 t\ ,\ y=a\sin^3 t$ به دور محور X ها بدست می‌آید.

(f)حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران شکل محدود به سهمی‌های $8x=y^2\, ,\, y=x^2$ به دور محور Y ها بدست می‌آید.

حل. (a) مطابق شکل زیر می‌توانیم حجم چنبره را به صورت تفاضل حجم‌های اجسامی نشان دهیم که از دوران ذوزنقه‌های منحنی‌الخط $ABCDE$ و $ABLDE$ به دور محور Xها را بدست می‌آیند.

شکل ۷ . ۳۳

معادله منحنی BCD عبارت است از $y=y_1(x)=b+\sqrt{a^2-x^2}$ و معادله منحنی BLD عبارت است از $y=y_2(x)=b-\sqrt{a^2-x^2}$. با استفاده از فرمول (1) داریم

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left[(y_1(x))^2-(y_2(x))^2\right]dx=\pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\pi b\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=2\pi^2 ba^2.$$

(b)با استفاده از تغییر متغیر حجم را بدست می‌آوریم وقتی t از 0 تا 2π تغییر کند x از 0 تا $2\pi a$ تغییر خواهد کرد و داریم

$$x = a\left(t - \sin t\right), \qquad dx = a\left(1 - \cos t\right)dt\ .$$

پس

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2\left(x\right)dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2\left(1 - \cos t\right)^2 a\left(1 - \cos t\right)dt$$
$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos t\right)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos^3 t - 3\cos t + 3\cos^2 t\ \right] dt$$

که پس از محاسبه بدست می‌آوریم $V = 5\pi^2 a^3$.

(c)معادله خطی که از مبدأ مختصات و نقطه $A(a,b)$ می‌گذرد عبارت است از $y = \frac{b}{a}x$ و لذا $x = \frac{a}{b}$. پس می‌توان نوشت

$$V = \pi \int_0^b x^2\ dy = \pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}\, y^2\ dy = \frac{\pi a^2 b}{3}\ .$$

شکل ۷ . ۳۴

(d) در دوران به دور محور Yها بایستی از حجمی که قسمت $\overset{\frown}{AB}$ در دوران ایجاد می‌کند حجمی را که قسمت $\overset{\frown}{OB}$ ایجاد می‌کند کم کنیم.

شکل ۷ . ۳۵

معادلات پارامتری قوس $\widehat{AB}$ عبارت است از

$$\begin{cases} x_1 = 2\pi a - a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$

و معادلات پارامتری قوس $\widehat{OB}$ عبارت است از

$$\begin{cases} x_2 = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$$

حجم حاصل از دوران از فرمول $V = \pi\int_a^b x^2\, dy$ بدست می‌آید. چون y از 0 تا $2a$ تغییر می‌کند متناظر با آن t از 0تا π تغییر می‌نماید. حجم مورد نظر عبارت است از

$$V = \pi\int_0^{2a}\left(x_1^2 - x_2^2\right)dy.$$

تغییر متغیر $y = a(1-\cos t)$ می‌دهیم، پس $dy = a\sin t\, dt$ و داریم

$$V = \pi\int_0^{\pi}\left[\left(2\pi a - a(t-\sin t)\right)^2 - a^2\left(t-\sin t\right)^2\right]\ a\sin t\, dt$$

که پس از محاسبه بدست می‌آوریم $V = 6\pi^3 a^3$.

(e)حجم مورد نظر V مساوی با دو برابر حجم حاصل از دوران شکل OAB به دور محور Xها می‌باشد. بنابراین

$$V = 2\pi\int_0^a y^2\, dx.$$

تغییر متغیر $x = a\cos^3 t$ می‌دهیم، $dx = -3a\cos^2 t\, sin\, t\, dt$ و $y = a\sin^3 t$. در ضمن $x = 0$ متناظر با $t = \frac{\pi}{2}$ و $x = a$ متناظر با 0 $t = 0$ است. در نتیجه

$$V = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2\sin^6 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)dt$$
$$= 6\pi a^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 t\, dt\right].$$

و با توجه به فرمولی که در حالت کلی برای محاسبه $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx$ داریم، بدست می‌آوریم

$$V = 6\pi a^3\left(\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

شکل ۷ . ۳۶

(f)بدیهی است که $x_2(y)=\sqrt{y}\geq x_1(y)=\frac{y^2}{8}$ در بازه‌ای که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطه اشتراک سهمی‌هاست. با حذف x از دستگاه زیر عرض‌های اشتراک دو سهمی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x. \end{cases}$$

شکل ۷ . ۳۷

بنابراین خواهیم داشت $y_1=0, y_2=4$. در نتیجه $V=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=\frac{24}{5}\pi$.

۷ . ۶ مساحت رویه حاصل از دوران

فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازۀ بسته $[a,b]$ نامنفی و پیوسته بوده و دارای مشتق مرتبه اول پیوسته بر این بازه باشد. در این صورت مساحت رویه حاصل از دوران شکل محدود به منحنی $y=f(x)$، محور Xها، خطوط $x=a$ و $x=b$ به دور محور Xها، که آن را با P نشان می‌دهیم، از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (1)$$

برای اثبات فاصله بسته $[a, b]$ را بوسیله نقاط

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

به n قسمت دلخواه تقسیم می‌کنیم. فرض کنیم

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n$$

نقاط متناظر با این تقسیمات بر روی منحنی $y = f(x)$ باشند. وقتی این کمان چند ضلعی را به دور محور Xها دوران می‌دهیم رویه‌ای بدست می‌آوریم که بوسیله سطح‌های جانبی مخروط‌های ناقض ایجاد شده است.

شکل ۷ . ۳۸

مساحت سطح جانبی مخروط ناقصی که از دوران قطعه iام از کمان چند ضلعی شکل بدست می‌آید مساوی است با

$$2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \ell_i$$

که در آن ℓ_i طول وتر $A_{i-1} A_i$ است، یعنی،

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}\,.$$

با استفاده از قضیه میانگین داریم

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

با قراردادن $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ بدست می‌آوریم

$$.\ell_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

بنابراین مساحت P از رویه حاصل از دوران تقریباً مساوی با مساحت سطح حاصل از دوران کمان چند ضلعی شکل است:

$$P \cong \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

ما حاصلجمع بالا را به صورت دو حاصلجمع نمایش می‌دهیم:

$$P \cong 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i \qquad (2)$$
$$+\pi\left\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\big(f(x_{i-1})-f(\xi_i)\big)+\big(f(x_i)-f(\xi_i)\big)\Big]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right\}.$$

اولین حاصلجمع در طرف راست رابطه بالا یک حاصلجمع انتگرال برای انتگرال معین (1) است و، وقتی که $n\to\infty$ و $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ با توجه به پیوستگی تابع $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ ، حد آن مساوی انتگرال معین (1) می‌گردد. نشان خواهیم داد که عبارت داخل آکولاد در طرف راست رابطه (2) دارای حد صفر است وقتی $\lambda\to 0, n\to\infty$. در حقیقت، چون تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته یک شکل است . بنا بر قضیه کانتور، به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای $\lambda<\delta$، نا مساوی‌های $|f(x_{i-1})-f(\xi_i)|<\varepsilon$ و $|f(x_i)-f(\xi_i)|<\varepsilon$ هر دو برقرار هستند. اگر ماکزیمم تابع $\sqrt{1+f'^2(x)}$ بر بازهٔ $[a,b]$ را با M نشان دهیم، آنگاه برای $\lambda<\delta$، عبارت داخل آکولاد را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{n}\big[\big(f(x_{i-1})-f(\xi_i)\big)+\big(f(x_i)-f(\xi_i)\big)\big]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right\}\right|$$
$$<2M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=2M(b-a)\varepsilon.$$

چون ε بقدر دلخواه کوچک است، نتیجه می‌گیریم که حد این عبارت وقتی $n\to\infty$ ، $\lambda\to 0$ مساوی با صفر است. بنابراین، با حد گرفتن از (2) وقتی $n\to\infty$ ، $\lambda\to 0$، داریم

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

یعنی، فرمول مورد نظر (1) را بدست می‌آوریم

تبصره: فرض کنیم رویهٔ حاصل از دوران منحنی $\overset{\frown}{AB}$ به دور محور Xها با معادلات پارامتری

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad ,\alpha\le t\le\beta$$

داده شده باشد که در آن $\psi(t)\ge 0$ و $\varphi(t)$ از a تا b تغییر می‌کند هر گاه t از α تا β تغییر کند، $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$. در این صورت با تغییر متغیر $x=\varphi(t)$ در (1) بدست می‌آوریم

$$P=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \qquad (3)$$

بالاخره، اگر منحنی در مختصات قطبی داده شده باشد، یعنی $\alpha\le\theta\le\beta$, $\rho=\rho(\theta)$، که در آن $\rho(\theta)$ دارای مشتق پیوسته در $[\alpha,\beta]$ است، آنگاه در این حالت منحنی را به صورت پارامتری

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases} ,\alpha\le\theta\le\beta$$

نمایش داده و فرمول (3) شکل زیر را پیدا خواهد کرد:

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\theta)\sin\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta. \qquad (4)$$

مثال ۹: (a) سطح کره‌ای به شعاع R را محاسبه کنید.

(b) سطح رویه حاصل از دوران یک شاخه از سیکلوئید

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

به دور محور Xها را محاسبه نمائید.

(c)قوسی از سهمی $y^2=2px$ متناظر به $x=0$ و $x=a$ به دور محور Xها دوران می‌کند. مساحت رویه حاصل از دوران را پیدا کنید.

(d)مساحت رویه‌ای را که از دوران دایرهٔ $x^2+(y-b)^2=a^2$، که در آن $b>a$، به دور محور Xها بدست می‌آید. محاسبه نمائید.

(e)قوس سیکلوئید در (b) به دور محور Y ها دوران می‌کند. مساحت رویه حاصل از دوران را پیدا کنید.

(f)مساحت رویه حاصل از دوران کاردیوئید $\rho=a(1+\cos\theta)$ به دور محور Xها را پیدا کنید.

حل. (a) نیمدایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R با معادله $y=f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ را در نظر می‌گیریم. اگر شکل محدود به این نیمدایره و محور Xها را به دور محور Xها دوران دهیم کره مورد نظر بدست می‌آید. داریم

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=2\pi\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx$$
$$=2\pi\int_{-R}^{+R}R\,dx=4\pi R^2 .$$

شکل ۷ . ۳۹

(b) با استفاده از فرمول (3) داریم

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2\left(1-\cos t\right)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt$$
$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos t\right)\sqrt{2\left(1-\cos t\right)} = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt$$
$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\, dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

(c) داریم

$$y = \sqrt{2px}\,, \qquad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} \text{ و } \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,.$$

بنابرفرمول (1)

$$P = 2\pi\int_0^a \sqrt{2px}\,\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx$$
$$= 2\pi\sqrt{p}.\frac{2}{3}\left(2x+p\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{2}\Big|_0^{\alpha} = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[\left(2a+p\right)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

(d)معادلهٔ این دایره را به صورت پارامتری نمایش می‌دهیم (شکل مثال ۸ قسمت (a)):

$$x = a\cos t\,, \qquad y = b + a\sin t.$$

بنابراین

$$x_t' = -a\sin t\,, \qquad y_t' = a\cos t\,.$$

مساحت خواسته شده عبارت است از

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} (b + a\sin t)\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\; dt$$
$$= 2\pi a\int_0^{2\pi} \left(b + a\sin t\right)dt = 4\pi^2 ab.$$

(e)چون دوران به دور محور Yهاست بایستی از فرمول

$$P = 2\pi\int_a^b x(y)\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$$

استفاده کنیم که در تبدیل به معادلات پارامتری $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\sqrt{\psi'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt.$$

شکل ۷ . ۴۰

معادلات قوس‌های OG, AG به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1=2\pi a-a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases},\qquad \begin{cases} x_2=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

حال بایستی مساحت‌هایی را که از دوران قوس‌های OG, AG حول محور Yها بدست می‌آیند حساب کرده و با هم جمع کنیم:

$$P_1=2\pi\int_0^{\pi}x_1\sqrt{x_1'^2+y'^2}\,dt,\qquad P_2=2\pi\int_0^{\pi}x_2\sqrt{x_2'^2+y'^2}\,dt.$$

اما

$$x_1'=-a(1-\cos t)\ \text{،}\quad x_2'=a(1-\cos t)\quad \text{و}\quad y'=a\sin t.$$

پس

$$P_1=2\pi\int_0^{\pi}\left(2\pi a-a(t-\sin t)\right)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

و

$$P_2=2\pi\int_0^{\pi}a(t-\sin t)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

اما $P=P_1+P_2$ و لذا

$$P=2\pi\int_0^{\pi}2\pi.2a\sin\frac{t}{2}\,dt=16\,a^2\,\pi^2.$$

(f) منحنی کار دیوئید در مثال ۳ قسمت (c) رسم شده است. اکنون با استفاده از فرمول (4) داریم

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi a\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\,d\theta \\
&= 4\pi a^2\int_0^{\pi}(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \\
&= 8\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta+8\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.
\end{aligned}$$

این انتگرال‌ها با تغییر متغیر $u=\cos\frac{\theta}{2}$ بسادگی قابل محاسبه بوده و جواب نهایی عبارت است از $P=\frac{32\pi a^2}{5}$.